BRANCH AND BOUND → SE IL PROBLEMA È DI MAX, PRIMA DI APPROCCIARE L'ES. LO TRASFORMO IN MINIMO

↳ UTILIZZA IL $\underbrace{\text{METODO DEL SIMPLESSO}}$

↳ ALGORITMO CHE RISOLVE PROBLEMI DI PL. (VARIABILI $\in \mathbb{R}$). MI DÀ LA SOLUZIONE OTTIMA DI UN PROBLEMA MA <u>NON</u> TIENE CONTO SE LE VARIABILI DEVONO ESSERE INTERE

- IL B&B USA IL SIMPLESSO PER TROVARE SOLUZIONI PARZIALI → AGGIUNGE RAMIFICAZIONI (ES: $3.5 \Rightarrow x \leq 3 \vee x \geq 4$) → SCARTA I RAMI CHE NON PORTANO AD UNA SOLUZIONE MIGLIORE

↳ USATO PER PROBLEMI CHE NON DEVONO AVERE DECIMALI (ES. QUANTITÀ DI OGGETTI, PERSONE ECC..)

↳ PASSIAMO DA PL → PLI / PLM^{MISTA}

- VOGLIAMO RISOLVERE IL PROBLEMA DI PLI : ($\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2 \dots\}$);

1

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ c^T x \\ \quad x \in Q_0 \\ \quad x \in \boldsymbol{Z}^n, \end{array}}$$

$\equiv$

2

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ c^T x \\ \quad x \in S_0, \end{array}}$$

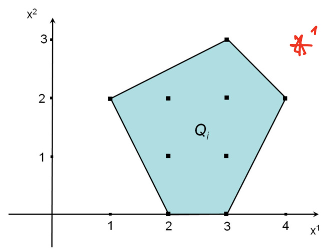
$S_0 = Q_0 \cap \mathbb{Z}^m$

DOVE SO CHE: $\overset{\text{GENERICO POLIEDRO IN } \mathbb{R}^m}{Q_0} = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geq b\}$

*2 RISOLVENDO IL 1° PROBLEMA, AVRÒ UN RISULTATO x_0 CHE SARÀ SICURAMENTE MINORE O UGUALE RISPETTO A QUELLO CHE TROVEREI NEL 2° PROBLEMA.

- S_0 CONTIENE TUTTI I PUNTI DEL POLIEDRO Q_0 A COORDINATE INTERE

- ASSUMIAMO CHE IL PROBLEMA <u>NON</u> SIA ILLIMITATO INFERIORMENTE



*1

Figura 1: Il poliedro Q_i e l'insieme $S_i = \{(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(4,2)\}$ dei punti a coordinate intere in esso contenuti, i.e. $S_i \subseteq Q_i$.

⇒ ESEMPIO Q_i CON $i = 0$: COSA È S_0?

↳ P.TI A COORDINATE INTERE $\in Q_0$: S_0

• PREMESSE

↳ I PUNTI S_i <u>NON È DETTO</u> CHE SIANO SUI VERTICI DEL POLIEDRO (PUÒ SUCCEDERE COME IN FIGURA) *1

↳ x_0 SOL. DI : $\begin{cases} \min\ c^T x \\ x \in Q_0 \end{cases}$ → PROBLEMA RILASSATO

$\hat{x}_0$ SOL. DI : $\begin{cases} \min\ c^T x \\ x \in S_0 \end{cases}$ → PROBLEMA SOLO INTERO

$f(\hat{x}_0) \geq f(x_0)$ [DETTO ANCHE IN *2] POICHÉ $S_0 \subseteq Q_0$

↳ **BRANCHING** : SUDDIVIDE LA REGIONE AMMISSIBILE S_0 IN SOTTOPROBLEMI $S_0 = \{S_1, S_2 \dots S_k\}$ (k ARBITRARIO; $S_1 = P_1$, $S_2 = P_2$ . . . .)

RAMIFICARE

$S_0 = \bigcup_{i=1}^{k} S_i \qquad \emptyset = S_i \cap S_j \qquad 0 \leq i \neq j \leq k$

- P_i È IL PROBLEMA A COORDINATE INTERE CHE IO OTTENGO DOPO AVER EFFETTUATO LA PARTIZIONE

↳ **BOUNDING** : RISOLVO SOLO UNA PARTE DI QUESTI SOTTO-PROBLEMI ⇒ NON LI RISOLVO A VARIABILI INTERE, MA COME UN CLASSICO PL.

IN SINTESI: B & B

✔ **Cosa succede in Branch and Bound:**

1. **Parti da un problema di PLI** (Programmazione Lineare Intera)
→ Vuoi **massimizzare** o **minimizzare**, ma con **variabili intere**.
2. **Lo rilassi** → cioè togli il vincolo di interezza e lo trasformi in un **problema di PL** classico (questo si chiama proprio **rilassamento lineare**).
3. **Risolvi il rilassamento lineare** (es. con il simplesso):
   - Se trovi una soluzione **intera**, hai finito ✅
   - Se la soluzione ha **valori non interi**, devi **ramificare** (fare "branch")
4. **Branch**: dividi il problema in due sotto-problemi, aggiungendo vincoli per forzare la variabile non intera a diventare intera (es. $x = 2.5 \Rightarrow x \leq 2$ e $x \geq 3$)
5. **Ripeti**: per ogni ramo, fai di nuovo il rilassamento lineare → se trovi una soluzione intera, tienila; altrimenti, branchi ancora.
6. **Bound**: se un ramo:
   - Ha una soluzione **peggiore** di quella che hai già trovata intera
   - O è **irrealizzabile**

allora lo **scarti** (cioè fai il "bound").

OBIETTIVO: TROVARE LA SOLUZIONE INTERA MIGLIORE

- DIVIDO IN VARI PASSI IL METODO:

1)

1. Sia $\tilde{z} = c^T\tilde{x}$ l'*ottimo corrente* (ovvero l'approssimazione corrente di una soluzione per (1). Il punto $\tilde{x}$ può essere calcolato in qualsiasi modo, anche attraverso ispezione visiva o tecniche euristiche) di (P_0), corrispondente al punto a coordinate intere $\tilde{x} \in I\!R^n$. Nel caso peggiore, ovvero se non si è in grado di stimarlo in nessun modo, si pone $\tilde{z} = +\infty$ e $\tilde{x}$ si pone *non noto*.

- OTTIMO CORRENTE: UN PUNTO $\in S_0$ CHE RIESCO A TROVARE FACILMENTE.
  INTERO $\tilde{x}$
- SE NON LO TROVO $\tilde{x} \nexists$ E $\tilde{z} = +\infty$ PER CONVENZIONE

2)

2. Sia $\mathcal{L}$ la lista dei cosiddetti *problemi aperti* (P_i), $i \geq 0$ (dei quali cioè è ancora necessario cercare un possibile bound per la soluzione). All'inizio della procedura $\mathcal{L}$ contiene solo il problema iniziale (P_0), ovvero si pone

$$\mathcal{L} = \{(P_0)\}.$$

PROBLEMA INIZIALE: $\min c^T x$, $x \in S_0$

3)

FINCHÉ NON SI SVUOTA LA LISTA

3. Si estrae dalla lista $\mathcal{L}$ il problema (P_i) (la scelta del problema (P_i) da estrarre dalla lista $\mathcal{L}$, i.e. la *regola di estrazione*, è arbitraria) e se ne risolve il rilassamento (PL_i) con le seguenti regole:

   (a) se (PL_i) ammette soluzione x_i e risulta $\underbrace{z_i}_{c^Tx} \geq \underbrace{\tilde{z}}_{c^T\tilde{x}}$, allora **si chiude** (P_i), ovvero il sottoproblema (P_i) non può contenere alcuna soluzione a coordinate intere migliore della soluzione corrente $\tilde{x}$, in quanto risulta comunque $c^T\hat{x}_i \geq c^Tx_i = z_i \geq \tilde{z}$;

   (b) se (PL_i) ha un insieme ammissibile vuoto, allora **si chiude** (P_i), in quanto il sottoproblema (P_i) è anch'esso vuoto. Quindi (P_i) non può contenere alcuna soluzione a coordinate intere migliore della soluzione corrente $\tilde{x}$;

   (c) se (PL_i) ammette soluzione x_i e risulta $z_i < \tilde{z}$, allora ci sono due possibili casi:

   - se $x_i \in \boldsymbol{Z}^n$ (ovvero se x_i ha tutte componenti intere), allora si pone $\tilde{x} = x_i$, $\tilde{z} = c^Tx_i$ e **si chiude** il sottoproblema (P_i) (in quanto x_i è anch'esso soluzione di (P_i)), ovvero

   $$\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus \{(P_i)\};$$

   - se $x_i \notin \boldsymbol{Z}^n$ (ovvero se x_i NON ha tutte componenti intere), allora **si partiziona** il problema (P_i) nei due sottoproblemi (P_{i+1}) e (P_{i+2}), e si pone

   $$\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus \{(P_i)\} \cup \{(P_{i+1}), (P_{i+2})\},$$

   ovvero da $\mathcal{L}$ si toglie (P_i) e si inseriscono (P_{i+1}) e (P_{i+2}). In particolare, se la componente j-sima x_i^j del vettore x_i risulta NON intera*, i.e.

   $$x_i^j = \alpha \notin \boldsymbol{Z},$$

   allora il problema (P_i) viene 'partizionato' nei due sottoproblemi

*Qualora vi siano più componenti del vettore x_i non intere, se ne sceglie arbitrariamente una.

$$\begin{aligned} \min\ & c^Tx \\ & x \in S_i \\ & x^j \leq \lfloor\alpha\rfloor \end{aligned} \qquad (P_{i+1})$$

$x \leq 3$

ES. 3.5

e

$$\begin{aligned} \min\ & c^Tx \\ & x \in S_i \\ & x^j \geq \lfloor\alpha\rfloor + 1, \end{aligned} \qquad (P_{i+2})$$

$x \geq 4$

essendo $\lfloor\alpha\rfloor$ la parte intera inferiore di α. Ai problemi P_{i+1} e P_{i+2} vengono associati i problemi rilassati (PL_{i+1}) e (PL_{i+2}), ottenuti 'suddividendo' (PL_i) come segue:

$$\begin{aligned} \min\ & c^Tx \\ & x \in Q_i \\ & x^j \leq \lfloor\alpha\rfloor \end{aligned} \qquad (PL_{i+1})$$

e

$$\begin{aligned} \min\ & c^Tx \\ & x \in Q_i \\ & x^j \geq \lfloor\alpha\rfloor + 1. \end{aligned} \qquad (PL_{i+2})$$

Ciò garantisce che (si veda anche la Figura 2)

$$S_i = S_{i+1} \cup S_{i+2} \qquad \text{e} \qquad \emptyset = S_{i+1} \cap S_{i+2}.$$

CON REGOLA ES. FIFO, LIFO ...

- ESTRAIAMO DALLA LISTA UNO DEI PROBLEMI (INIZIALMENTE CI SARÀ SOLO P_0)
  - ↳ RISOLVO IL RILASSAMENTO DEL PROBLEMA → $P_0 \xRightarrow{\text{RELAX:}} \min c^T x$, $x \in Q_0$
    PERCHÉ CON RILASSAMENTO "TORNO INDIETRO", SENZA RILASS. AVREI AVUTO S_0
    PL_0 (PL_i IN GEN.)

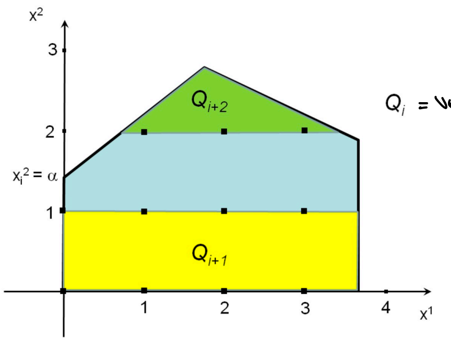
a) → SE IL RILASSAMENTO È $\geq$ ALLA MIGLIOR SOL. INTERA, ALLORA POSSO SCARTARE IL PROBLEMA P_0 (O P_i IN GEN.)
  - ↳ RISOLVO RILASSAMENTO LINEARE DI UN SOTTOPROBLEMA P_i → OTTENGO SOL. x_i (NON INTERO) E CALCOLO $z_i = c^T x_i$ E LO CONFRONTO CON $\tilde{z} = c^T\tilde{x}$
    ↳ DOVREI AVERE GIÀ
  - ↳ SE $z_i \geq \tilde{z}_i$ ALLORA CHIUDO IL PROBLEMA P_i
  - ↳ SE SOL. È IMPOSSIBILE CHIUDO PROBLEMA

b) → SE L'INSIEME AMMISSIBILE DEL PROBLEMA CORRENTE P_i È VUOTO, ALLORA CHIUDO IL PROBLEMA

c)
  - ↳ SE LA NUOVA SOL. x' (DEL PL_i) È MEGLIO DI $\tilde{x}$: $z < \tilde{z}$ MA x NON È INTERO, ALLORA NON SAVO LA SOLUZIONE. SE INVECE x È INTERO E FA SI CHE $z \geq \tilde{z}$ ALLORA LO AGGIORNO COME MIGLIOR SOLUZIONE E CHIUDO IL PROBLEMA
  - ↳ SE HO DOVUTO SUDDIVIDERE DI NUOVO, ~~TOLGO~~ CHIUDO IL PROBLEMA E AGGIUNGO I SOTTO-PROBLEMI ALLA LISTA E RICOMINCIO

- MI FERMO QUANDO LA LISTA L È VUOTA

- GRAFICO PER VISUALIZZARE SUDDIVISIONE IN SOTTO-PROBLEMI P_{i+1} E P_{i+2}:



Q_i = VERDE + AZZURRO + GIALLO

Figura 2: A partire dal poliedro Q_i si generano i poliedri $Q_{i+1} = Q_i \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq \lfloor \alpha \rfloor\}$ e $Q_{i+2} = Q_i \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq \lfloor \alpha \rfloor + 1\}$, così che $S_{i+1} \subseteq Q_{i+1}$ e $S_{i+2} \subseteq Q_{i+2}$.

IL B&B PER PROBLEMI DI KNAPSACK BINARIO

ZAINO 0-1

↳ CASO PARTICOLARE DI PLI → SI PUÒ RILASSARE $x_i \in [0,1]$ → POSSO RISOLVERE RILASSAMENTO CON SIMPLESSO → SE SOL. $\notin \mathbb{Z}$, USO B&B

Vogliamo risolvere il problema di PLI

$$
\begin{array}{l}
\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \\
x \in \{0,1\}^n,
\end{array}
\qquad (K_0)
$$

PROB. INTERO

- IMMAGINIAMO UNO ZAINO CON VOLUME = b
  - ↳ QUALE PRIORITÀ DARE A QUALI OGGETTI?
  - ↳ x_J OGGETTO J-ESIMO: $= 0$ SE NON INSERISCO, 1 ALTRIMENTI
  - ↳ a_J VOLUME DELL'OGGETTO J-ESIMO
  - ↳ c_J UTILITÀ / PRIORITÀ DELL'OGGETTO J-ESIMO (DIPENDE DALLE PRIORITÀ DI OGNI PERSONA)
  - ↳ RILASSARE QUESTO PLI $\Rightarrow 0 \le x_J \le 1$

che rappresenta la massimizzazione dell'utilità di inserire oggetti di volume finito in uno zaino (*knapsack*). In particolare si ha che

- "c_j" rappresenta l'utilità di inserire l'oggetto j-simo nello zaino
- "a_j" rappresenta il volume dell'oggetto j-simo
- "b" rappresenta il volume dello zaino
- "$x_j \in \{0,1\}$", con $x_j = 1$ se l'oggetto j-simo viene inserito nello zaino, e $x_j = 0$ altrimenti.

Si tratta di un problema di Programmazione Lineare Intera, in cui è presente un solo vincolo, a parte i vincoli di interezza (binari), che può essere risolto quindi con il metodo del B&B. A tal fine, se si usa il B&B risulta piuttosto agevole la soluzione del rilassamento lineare (KL_0) di (K_0), **senza usare il Metodo del Simplesso**. Infatti, si ha per (KL_0) l'espressione

- IMMAGINIAMO $c_J = 0$ (PRIORITÀ): ALLORA L'OGGETTO NON VERREBBE INSERITO (NON MI SERVE)
  SE $a_J = 0$ L'OGGETTO NON OCCUPA SPAZIO

$$
\begin{array}{l}
\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \\
0 \le x_j \le 1, \qquad j = 1, \dots, n.
\end{array}
\qquad (KL_0)
$$

↳ RILASSATO

Per ottenere una soluzione di quest'ultimo, valgono le seguenti osservazioni:

(i) se $\boxed{c_j = 0}$ allora la variabile x_j non contribuisce alla massimizzazione della funzione obiettivo e basterà pertanto porre:

- $x_j = 0$ se $a_j \ge 0$ (non uso parte del volume dello zaino per contenere il j-simo oggetto)
- $x_j = 1$ se $a_j < 0$ (uso parte del volume dello zaino per contenere il j-simo oggetto) → AUMENTA VOLUME

(ii) se $\boxed{a_j = 0}$ allora la variabile x_j non influenza il vincolo sul volume dello zaino, pertanto basterà porre:

- → NON OCCUPA SPAZIO MA NON SERVE A NULLA (ANZI DÀ FASTIDIO PER $c_J < 0$)
- $x_j = 0$ se $c_j \le 0$ (non decremento l'utilità includendo l'oggetto j-simo)
- $x_j = 1$ se $c_j > 0$ (incremento l'utilità includendo l'oggetto j-simo)
  ↳ NON OCCUPA SPAZIO MA MI SERVE

(iii) se $\boxed{c_j a_j \ne 0}$ allora senza scapito di generalità si può assumere che sia

$$c_j > 0, \quad a_j > 0,$$

in quanto altrimenti (ragionando come per (i) e (ii))

- se $c_j < 0$ e $a_j > 0 \implies$ basta porre $x_j = 0$ → NON MI SERVE ED OCCUPA SPAZIO
- se $c_j > 0$ e $a_j < 0 \implies$ basta porre $x_j = 1$ → MI SERVE L'OGGETTO E MI CREA VOLUME
- se $c_j < 0$ e $a_j < 0 \implies$ basta effettuare il cambio di variabile $x_j = 1 - y_j$, con $y_j \in \{0,1\}$,

ottenendo così un problema risultante con tutti coefficienti positivi.

$a > 0,\ c > 0$ NON DEVO FARE NULLA

$a < 0,\ c < 0 \Rightarrow$ SOSTITUISCO x_J CON $1 - y_J$ CON $y_J \in \{0,1\}$

(iv) Ottenuto il nuovo problema di PLI, nel quale è stato assegnato un valore a $n - m$ variabili (con $m \le n$) applicando (i), (ii) e (iii), si ordinano (eventualmente rinominandole) le restanti m variabili, non assegnate ai punti (i), (ii) e (iii), in base al rapporto c_j/a_j **non crescente**, i.e.

$$\frac{c_1}{a_1} \ge \frac{c_2}{a_2} \ge \dots \ge \frac{c_m}{a_m}.$$

→ RIORDINO VARIABILI CON RAPPORTO BENEFICIO - COSTO

↳ IL PIÙ ALTO È IL MIGLIORE (ES. RAPPORTO PESO - POTENZA)

↳ $\dfrac{\text{UTILITÀ}}{\text{SPAZIO OCCUPATO}}$

↳ LE RIORDINO QUASI TUTTE: QUELLE SCARTATE A PRIORI NON CONTANO

Si determina ora l'indice h, con $1 \le h \le m$, tale che (si ricordi che dopo aver applicato (i)-(iii), si avrà al punto (iv) che $a_j > 0,\ j \ge 1$)

$$\sum_{j=1}^{h} a_j \le b \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{h+1} a_j > b$$

e si sceglie

$$
\begin{cases}
x_j = 1, & j = 1, \dots, h \\
x_{h+1} = \dfrac{b - \sum_{j=1}^{h} a_j}{a_{h+1}} < 1 \\
x_j = 0, & j = h+2, \dots, m.
\end{cases}
$$

→ SETTO LE VARIABILI $x_J = 1$ IN MODO CHE LA SOMMA $\sum_{J=1}^{h} a_J \le b$ (RIMANGA NEL BUDGET) E CHE SE ARRIVASSI AD $h+1$, ALLORA SFOREREI IL BUDGET b

ESEMPIO

DIAMO UN ESEMPIO DELLA PRECEDENTE PROCEDURA (i)-(iv) PER LA SOL. DEL KNAPSACK BINARIO: (SU RILASSAMENTO)

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - x_5 + x_6 \\ & 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le \frac{1}{2} \\ & x \in \{0,1\}^6, \end{aligned} \qquad (K_0)$$

il cui rilassamento (KL_0) risulta essere

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - x_5 + x_6 \\ & 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le \frac{1}{2} \\ & 0 \le x_j \le 1, \qquad j = 1, \ldots, 6. \end{aligned} \qquad (KL_0)$$

CREA PIÙ SPAZIO NELLO ZAINO

x_1 → NON FACCIO NULLA (SIA F OBIETT. CHE VINCOLO > 0)

x_2 → = 1 PERCHÉ CREA SPAZIO ED È UTILE

x_3 → NIENTE

x_4 → NON È UTILE ($c_J < 0$, $a > 0$ ⇒ $x_J = 0$) → $x_4 = 0$
NON MI SERVE OCCUPA SPAZIO

x_5 → $a < 0$, $c < 0$ → $x_5 = 1 - y_5$ CON $y_5 \in \{0, 1\}$

x_6 → = 1 PERCHÉ NON OCCUPA SPAZIO E MI È UTILE ($c_J > 0$)

Usando i risultati in (i), (ii) e (iii) possiamo assegnare facilmente il valore di alcune variabili (i.e. $x_2^* = 1$, $x_4^* = 0$, $x_6^* = 1$), ottenendo in particolare il problema equivalente

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 2 \cdot 1 + 3x_3 - 5 \cdot 0 - (1 - y_5) + 1 \\ & 3x_1 - 3 \cdot 1 + x_3 + 1 \cdot 0 - (1 - y_5) \le 0.5 \\ & 0 \le x_1, x_3, y_5 \le 1, \end{aligned}$$

→ SOSTITUISCO CON I NUOVI VAL. TROVATI

ovvero

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 3x_3 + y_5 + 2 \\ & 3x_1 + x_3 + y_5 \le 4.5 \\ & 0 \le x_1, x_3, y_5 \le 1. \end{aligned}$$

Si provvede ora, in base a (iv), ad ordinare in modo non crescente i rapporti dei coefficienti delle restanti 3 variabili (x_1, x_3 e y_5), i.e.

ORDINE DECRESCENTE IN BASE A GRANDEZZA RAPPORTO

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & & x_1 & & y_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{3}{1} & \ge & \frac{4}{3} & \ge & \frac{1}{1}, \end{array}$$

e di conseguenza si passa a risolvere (riordinando le variabili) il problema

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_3 + 4x_1 + y_5 + 2 \\ & x_3 + 3x_1 + y_5 \le 4.5, \\ & 0 \le x_1, x_3, y_5 \le 1. \end{aligned}$$

→ $x_3 = 1$ ∧ $x_1 = 1$ MI RIMANE 0.5 DI SPAZIO ALLORA y_5 DEVO METTERLO A 0.5

In base a (iv), essendo $h = 2$, risulta per la soluzione

h = N° DI VARIABILI CHE POSSO SETTARE A 1

$$x_3^* = 1$$

$$x_1^* = 1$$

$$y_5^* = \frac{4.5 - (1 + 3)}{1} = 0.5$$

e pertanto la soluzione finale del rilassamento (KL_0) è data da

$$x_1^* = 1; \quad x_2^* = 1; \quad x_3^* = 1; \quad x_4^* = 0; \quad x_5^* = 1 - y_5^* = 0.5; \quad x_6^* = 1.$$